La voiture dans l'air

Deux facteurs entrent dans l'estimation des performances d'un moteur électrique :

- Sa puissance, donnée par la relation $P = \frac{dE}{dt}$
- Son couple, dépendant de la puissance et de sa vitesse de rotation : $C = \frac{P}{\omega}$

Pour mémoire, $\omega = 2\pi f$, où f est le nombre de tours par seconde.

Dans le cas d'un moteur électrique, le couple découle du courant qui est injecté dans les bobines. Le facteur limitant est donc la chaleur dégagée par effet Joule par le passage de ce courant. En effet, si le courant est trop important, l'isolant dans le bobinage pourrait fondre, causant un court-circuit et une panne du moteur.

La puissance dépend simplement de la tension et de l'intensité : $P = Ui$. La tension est constante (habituellement à 400 V dans une voiture électrique), donc l'intensité est ici la variable.

Réécrivant l'expression pour le couple, on en déduit que le couple dépend de l'intensité injectée dans les bobines et de la vitesse de rotation du moteur.

$$C = \frac{Ui}{\omega}$$

A mesure que la vitesse de rotation augmente, le couple diminue. Pour compenser, on peut augmenter l'intensité mais, comme on l'a vu, cette intensité a une limite.

Prenons le moteur d'une petite voiture électrique, d'une puissance nominale de 100 kW. S'il fonctionne, comme on l'a dit, sous 400 V, l'intensité maximale qui peut passer dans ses bobines est de :

$$100 \times 10^3 = 400i \quad \rightarrow \quad i = \frac{100 \times 10^3}{400} = 250A$$

Le couple nominal d'un tel moteur est de 245 Nm. On en déduit la vitesse de rotation nominale :

$$245 = \frac{100 \times 10^3}{\omega}$$

$$\omega = \frac{100 * 10^3}{245} = 408 rd.s^{-1} \text{ ou } 3900 trs.min^{-1}$$

Le couple d'un moteur électrique peut donc être maintenu constant jusqu'à un régime moteur de 3900 tours par minute. On peut donc estimer qu'en deçà de ce régime, le couple d'un moteur électrique peut être maintenu constant.

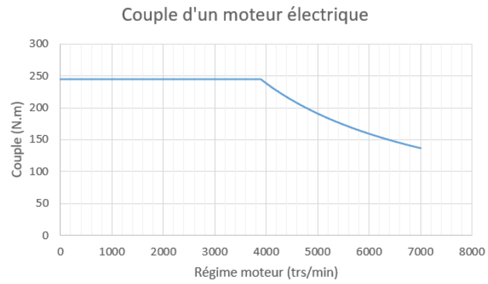
$$i = \omega \frac{C}{U}$$

A tension et couple constants, l'intensité augmente avec la vitesse de rotation.

A partir de $3900 trs.min^{-1}$, l'intensité atteint un maximum. Elle devient donc constante, et le couple est fonction de la vitesse de rotation.

$$C = \frac{Ui}{\omega}$$

On déduit de ces informations une courbe du couple en fonction de la vitesse de rotation du moteur.



Passons à une simulation. Dans un premier temps, pour rester sur des calculs relativement simples, présumons que le couple est constant à n'importe quel régime.

Le régime moteur et la vitesse de rotation des roues ne sont pas les mêmes. En effet, la vitesse linéaire d'une voiture est proportionnelle à la vitesse de rotation des roues et à leur rayon.

$$v = \omega r$$

Si le régime moteur et la vitesse de rotation des roues était le même, un régime de 2000 tours par minute correspondrait à une vitesse de 150 km/h, ce qui n'est pas le cas.

Comme on l'a vu, le couple dépend de la puissance et de la vitesse de rotation. Entre le moteur et les roues, la transmission permet de diviser la vitesse de rotation. Ignorant les pertes mécaniques, on peut écrire une expression pour le couple moteur et le couple à la roue.

$$C_1\omega_1 = C_2\omega_2$$

Il en résulte que le couple augmente lorsque la transmission diminue la vitesse de rotation.

$$C_2 = C_1\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Le ratio du régime sur la vitesse de rotation des roues permet donc d'estimer par combien le couple est multiplié par la transmission. En général, ce ratio est de 10 pour 1. On en déduit que le rapport de transmission permet de multiplier le couple moteur par 10.

$$C_2 = 10C_1$$

Le couple C à la roue de notre voiture électrique est donc de 2450 N.m. Cette valeur est ce qui détermine la force F avec laquelle la voiture pousse sur la route pour avancer.

Cette force, elle dépend non seulement du couple mais aussi de la taille de ses roues :

$$C = F\,r$$

On en déduit la force en fonction du couple :

$$F = \frac{C}{r}$$

Plus le rayon des roues est important, plus la force est petite. Dans le cas d'une voiture dont les roues ont un rayon de 24 cm, la force avec laquelle elle pousse sur la route est de 10200 N.

C'est la première force que ressent une voiture lorsqu'elle roule : la force avec laquelle elle pousse sur la route.

La deuxième force est la force de roulement F_r. En effet, les roues ne sont pas parfaitement rigides (et c'est une bonne chose pour notre dos !), et la voiture doit pousser (appliquer une force) pour surpasser cette force.

Cette force ne dépend que du poids de la voiture (dans notre exemple, 1500 kg) et du coefficient de friction de roulement des roues μ (typiquement, 0.015).

$$F_r = \mu F_N$$

La force normale F_N, elle, est simplement la force appliquée par la route sur la voiture – pour qu'elle ne traverse pas la route.

$$F_N = mg$$

La troisième force que ressent la voiture est la force de traînée F_D. Celle-là est un peu plus compliquée, et elle provient de la résistance de l'air à être traversé :

$$F_D = \frac{1}{2}\rho C_D S v^2$$

La masse volumique de l'air ρ est d'environ 1.3 kg.m^{-3}, le C_D de la voiture est de 0.75, et sa surface frontale S est de 2.8 m^2.

Ces trois forces nous permettent d'écrire la seconde loi de Newton pour le cas d'une voiture qui roule sur la route.

$$ma = F - F_r - F_D$$

Représentons toutes les forces :	$ma = F - \mu mg - \frac{1}{2}\rho C_D S v^2$
Nous pouvons rassembler les m :	$a = \frac{F}{m} - \mu g - \frac{1}{2m}\rho C_D S v^2$
Les deux premiers termes étant constants, on peut le rassembler dans une constante α :	$\alpha = \frac{F}{m} - \mu g$ $a = \alpha - \frac{\rho C_D S}{2m} v^2$
Nous pouvons factoriser α :	$a = \alpha\left(1 - \frac{\rho C_D S}{2m\alpha} v^2\right)$
Et enfin exprimer a pour ce qu'il est : la dérivée de la vitesse :	$\frac{dv}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{\rho C_D S}{2m\alpha} v^2\right)$
Définissons une constante β pour clarifier :	$\beta^2 = \frac{\rho C_D S}{2m\alpha}$ $\frac{dv}{dt} = \alpha(1 - \beta^2 v^2)$
Séparons les variables:	$\frac{dv}{1 - \beta^2 v^2} = \alpha\,\mathrm{dt}$
Opérons une substitution:	$u^2 = \beta^2 v^2$ $u = \beta v$ $du = \beta dv$ $dv = \frac{du}{\beta}$
Ce qui nous donne:	$\frac{1}{\beta}\frac{du}{1 - \mathrm{u}^2} = \alpha \mathrm{dt}$
Simplifions encore:	$\frac{du}{1 - u^2} = \alpha\beta dt$
Nous pouvons utiliser l'identité remarquable pour encore simplifier le côté gauche :	$\frac{1}{1-u}\frac{1}{1+u} du = \alpha\beta dt$
Et simplifier encore :	$\frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} = \alpha\beta dt$
Un rapide test nous donne $a = b = \frac{1}{2}$. On peut donc écrire :	$\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} = 2\alpha\beta dt$
On peut maintenant prendre les intégrales :	$\int \frac{1}{1-u} du + \int \frac{1}{1+u} du = 2\alpha\beta \int_0^t dt$

Procédons à une avant-dernière substitution :	$w = 1 - u$ $du = -dw$	$-\int \frac{1}{w} dw + \int \frac{1}{1+u} du = 2\alpha\beta t$
J'en ai profité pour intégrer le côté droit (c'était facile). Une dernière substitution :	$w = 1 + u$ $du = dw$ $-(ln(w) + c) + \int \frac{1}{w} dw = 2\alpha\beta t$	
Terminons-en une bonne fois pour toutes avec les intégrales :	$-[ln(w)]_1^{1-u} + [ln(w)]_1^{1+u} = 2\alpha\beta t$	
Ce qui nous donne :	$ln(1+u) - ln(1-u) = 2\alpha\beta t$	
Appliquons une dernière identité remarquable :	$ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\alpha\beta t$	
Et résolvons pour v : $\frac{1+\beta v}{1-\beta v} = e^{2\alpha\beta t}$ $1 + \beta v = e^{2\alpha\beta t} - \beta v\, e^{2\alpha\beta t}$	$\beta v + \beta v\, e^{2\alpha\beta t} = e^{2\alpha\beta t} - 1$ $\mathrm{v}\left(\beta + \beta e^{2\alpha\beta t}\right) = e^{2\alpha\beta t} - 1$ $v = \frac{e^{2\alpha\beta t} - 1}{\beta + \beta e^{2\alpha\beta t}}$	

Remettons enfin toutes les constantes dont nous nous étions débarrassés au début :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho C_D S}{2(F - \mu g)}}} \frac{e^{2\left(\frac{F}{m} - \mu g\right)\sqrt{\frac{\rho C_D S}{2(F-\mu g)}}t} - 1}{1 + e^{2\left(\frac{F}{m} - \mu g\right)\sqrt{\frac{\rho C_D S}{2(F-\mu g)}}t}}$$

C'est joli, non ?

Malheureusement, si nos mathématiques sont bonnes, notre physique laisse à désirer. En effet, on a oublié de prendre en compte un fait mentionné plus tôt : le couple n'est constant que jusqu'à un régime maximal (3900 tours par minute).

Tout d'abord, on peut estimer à quelle vitesse ce régime est atteint. Sachant que le rapport de transmission est de 10/1 :

$$n_2 = \frac{n}{10}$$

Ce qui donne un nombre de tours par minute de la roue de 390. Convertissons cela en fréquence, puis en vitesse de rotation :

$$f = 60\, n$$

$$\omega = 2\pi f$$

Cela nous donne une vitesse de rotation de 41 radians par seconde. Nous pouvons enfin trouver la vitesse :

$$v = \omega r$$

On calcule une vitesse de 9.8 mètres par seconde, soit environ 35 km par heure. Notre formule n'est donc valable que pour les premières secondes de l'accélération.

Nous devons reprendre la seconde loi de Newton pour le cas où le couple est constant, puis pour le cas où il décroît. Comme je ne connais pas de manière de résoudre le second cas analytiquement, nous effectuerons des approximations.

Dans un premier temps, l'approximation s'écrit comme suit :

$$\Delta v = \frac{F}{m}\Delta t - \mu g \Delta t - \frac{1}{2m}\rho C_D S v^2 \Delta t$$

Ce qui donne la suite numérique :

$$v_{n+1} = v_n + \frac{F}{m}\Delta t - \mu g \Delta t - \frac{1}{2m}\rho C_D S {v_n}^2 \Delta t$$

Pour le second temps, nous reprenons la définition de la force :

$$F = \frac{C_2}{r}$$

Nous exprimons le couple en fonction de la puissance et de la vitesse de rotation des roues. Nous présumons ici que la puissance ne subit pas de pertes entre le moteur et les roues.

$$F = \frac{P}{\omega_2 r}$$

$$F = \frac{P}{v}$$

Nous pouvons écrire la deuxième version de la loi de Newton :

$$ma = \frac{P}{v} - \mu m g - \frac{1}{2}\rho C_D S v^2$$

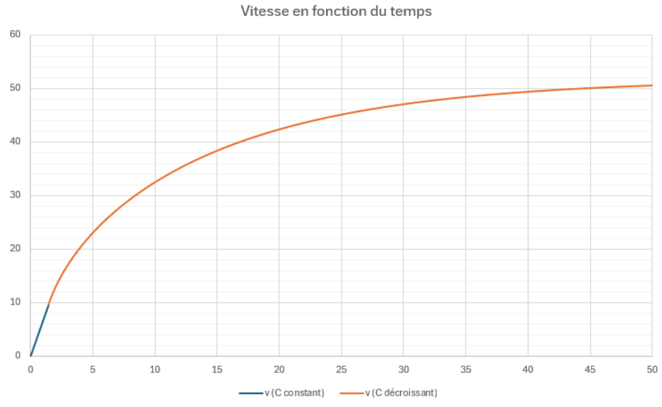
Il nous reste alors à effectuer l'approximation.

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{P}{v} - \mu m g - \frac{1}{2}\rho C_D S v^2$$

$$\Delta v = \frac{P}{m\, v}\Delta t - \mu g \Delta t - \frac{1}{2m}\rho C_D S v^2 \Delta t$$

Ce qui nous permet décrire l'expression donnant le terme suivant d'une suite numérique :

$$\mathrm{v}_{n+1} = v_n + \frac{P}{m v_n}\Delta t - \mu g \Delta t - \frac{1}{2m}\rho C_D S {v_n}^2 \Delta t$$



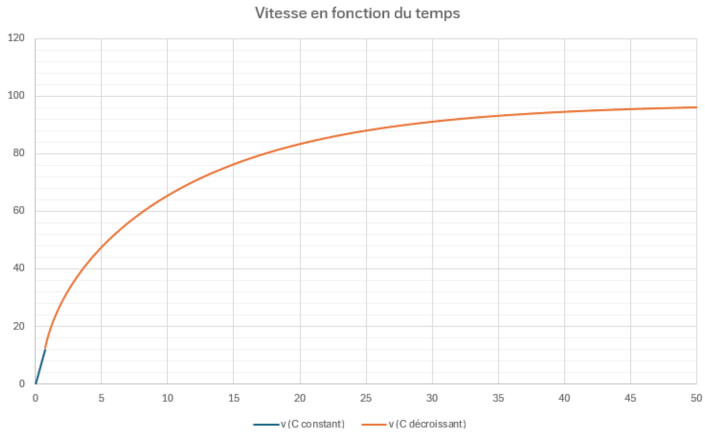
Nous obtenons le graphique ci-contre, qui nous permet de tirer plusieurs informations :

La vitesse augmente linéairement jusqu'à 10 mètres par seconde. A ce moment, le couple commence à décroître, et elle épouse une forme logarithmique, qui indique une asymptote.

L'asymptote est atteinte aux alentours de la cinquantième seconde. Elle indique donc la vitesse maximale atteinte par la Renault Zoé : 50 mètres par seconde, soit 180 km par heure.

La vitesse de 27.7 mètres par seconde (100 km par heure) semble être atteinte en 7 secondes. Selon Renault, cette vitesse est atteinte en 9.5 secondes. Cette différence notable indique qu'une de nos présomptions était encore trop optimiste. Notamment, nous avons pris le parti d'ignorer les pertes dues à la transmission et au moteur lui-même (pertes fer et autres). Elles sont notables pourtant, typiquement entre 15 et 20%. Leur prise en compte dans nos calculs, réduisant la puissance disponible à la roue à 80 kW, donne un 0-100 km/h plus proche de la réalité, et une vitesse maximale d'environ 167 km/h.

Maintenant que notre modèle semble plus réaliste, appliquons-le à une Tesla modèle S – une voiture significativement plus chère. Nous présumerons les mêmes pertes à la transmission, la même friction de rotation, ne changeant que les dimensions, le coefficient de pénétration dans l'air et la puissance.



$$C_D = 0.22$$

$$S = 2.84m^2$$

Pour une puissance de 500 kW et un couple moteur de 755 N.m, le 0-100 km/h est atteint en environ 2 secondes, et la vitesse maximale est de 96 m/s (environ 350 km/h).

L'utilité de ces calculs théoriques réside dans la modélisation pour prévoir, et la comparaison avec la réalité pour la détection de pertes. On peut ainsi, en effectuant quelques calculs, identifier les sources de pertes (coefficient de traînée, friction de rotation, transmission...) et ainsi déterminer sur quels aspects travailler pour améliorer les performances d'une voiture.